

*Крылова Лидия Михайловна,*

*учитель математики первой квалификационной категории*

*ЧУ СОШ «Экстерн плюс»*

Методическая разработка

# Учебно-исследовательские задачи на уроках математики

Данное пособие содержит подборку учебно-исследовательских задач по различным темам курса математики, рекомендации по составлению таких задач и применению современных компьютерных программ для организации деятельности обучающихся при их решении.

### Оглавление

1. Краткие рекомендации для организации учебно-исследовательской работы на уроке.....
2. Применение программных математических сред GeoGebra, «1С: Математический конструктор» (Версия 2.0), Graph plotter v.1.0 на уроке.
3. Учебно-исследовательские задачи.
4. Литература, интернет - ресурсы.

## **1 . Краткие рекомендации для организации учебно-исследовательской работы на уроке.**

1. Содержание материала остается в рамках, определяемых программой.
2. Учебно-исследовательские задачи составляем из традиционных задач, изменяя их формулировки:
  - Не сообщаем готовое утверждение в задачах на доказательство, а просим проанализировать ряд частных случаев и сформулировать гипотезу.
  - Задачи на доказательство переформулируем, используя «доказать или опровергнуть».
  - Предлагаем обучающимся изменять какой-нибудь параметр (указываем какой) и фиксировать те изменения, которые при этом происходят (или отсутствие). Таким образом, наводим обучающихся на факт, который нужно открыть.
3. На начальном этапе показываем из каких соображений выдвигаются гипотезы и, как и зачем их доказывать.
4. Активно используем программные математические среды GeoGebra, «1С: Математический конструктор» (Версия 2.0), Graph plotter v.1.0., «Живая математика», дающие неограниченный простор для экспериментов.
5. Оценивать формально исследовательские умения не стоит, потому что гарантированно им научить нельзя.

Отличным достижением будет, если в результате такой работы, ученик, столкнувшись с трудной задачей, не устранился от нее, а начнет анализировать частные случаи, пока не выстроится некая закономерность.

Поэтапное решение учебно-исследовательских задач должно обеспечить продуктивное и системное формирование исследовательских компетенций, а также систематизацию и закрепление полученных знаний.

Алгоритм решения учебно-исследовательской задачи:

1. Понять предложенную исследовательскую задачу или выдвинуть ее самостоятельно.
2. Анализировать имеющиеся факты, знания, умения.
3. Осознать недостаток знаний.
4. Пополнить недостаток знаний путем наблюдения, опытов, экспериментов.
5. Выдвинуть гипотезу.
6. Обосновать, доказать гипотезу.
7. Сделать вывод и обобщение.

В этом алгоритме прослеживаются основные элементы методологии научного исследования.

В 5-6 классах учебно-исследовательская работа заключается в проведении экспериментов, анализе их результатов, формулировке гипотезы, нахождении контрпримеров. При этом необходимо акцентировать внимание, что полученные выводы не являются достоверными, так как не подверглись строгим доказательствам и эти доказательства предстоит провести в дальнейшем изучении курса математики.

## **2. Применение программных математических сред GeoGebra, «1С: Математический конструктор» (Версия 2.0), Graph plotter v.1.0 на уроке.**

Большой простор для экспериментирования дают программы GeoGebra, «1С: Математический конструктор» (Версия 2.0), Graph plotter v.1.0.

### **GeoGebra**

Позволяет создавать конструкции с точками, векторами, линиями, коническими сечениями, а также математическими функциями, а затем динамически изменять их, напрямую вводить уравнения и манипулировать координатами.

### **Graph Plotter v.1.0.**

Мощный и в тоже время удобный инструмент для построения и анализа функций. Умеет находить асимптоты, пределы, экстремумы, считать интегралы и многое другое.

### **«1С: Математический конструктор» (Версия 2.0)**

Программная среда «1С:Математический конструктор» предназначена для создания интерактивных моделей по математике, сочетающих в себе конструирование, динамическое варьирование, эксперимент.

Инструменты этих программ позволяют не только выполнять геометрические построения, измерения, строить графики, но и варьировать чертежи. Последнее особенно важно при введении в уроки элементов исследовательской деятельности, так как позволяет легче видеть те свойства изучаемого объекта, которые остаются постоянными. Это дает возможность учащимся осознать ту или иную идею и смоделировать гипотезу. Кроме того повышается степень эмоциональной вовлеченности учащихся, повышается запоминаемость материала.

Ссылки на руководство для начинающих изучать программы:

<http://geogebra.ru/www/index.php>

<http://my-soft-blog.net/397-geogebra.html>

<http://yspexov.ru/21872--Graph-Plotter-v1.0-poslednyaya-versiya.html>

<http://obr.1c.ru/mathkit/>

Методика использования программных сред зависит от имеющегося оборудования. В соответствии с уровнем технического оснащения можно организовать различные варианты включения конструктивной среды в учебный процесс.

- Компьютер с проектором у учителя. В этом случае наиболее эффективным будет использование функций программ для демонстрации свойств изучаемых объектов в зависимости от изменения и т. д.

- Компьютерный класс. Это оптимальный вариант оборудования при работе на уроках-практикумах. Наилучший способ работы с заданиями на исследование – групповой, при котором ученики работают в компьютерном

классе в парах по 2 человека за одной машиной (один выполняет практические шаги, другой фиксирует результаты). В таком же режиме можно работать и с заданиями на построение, хотя более целесообразно организовать в этом случае индивидуальную работу, если для этого есть возможность.

- Домашний компьютер. Целесообразно оставить для домашней работы исследовательские задачи, требующие большего времени с последующим обсуждением результатов на уроке. Здесь возможен выход на проектную работу.

Организация различных видов работы с помощью программных сред:

- демонстрация (учащиеся имеют возможность рассмотреть объект, изменить его размеры, положение);
- моделирование (на основе готовой модели создаются другие, вводятся новые данные, параметры);
- конструирование (возможность собирать новые модели из интерактивной коллекции моделей);
- исследование свойств (отрабатываются умения проводить наблюдения, анализировать, классифицировать, строить выводы, формулировать гипотезы).

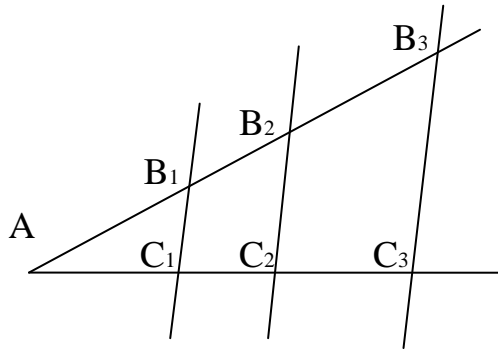
Задача учителя – предлагать достойные темы, показывать методы исследования, побуждать к теоретическому обоснованию гипотез, выдержавших экспериментальные проверки.

### **3. Учебно-исследовательские задачи**

**6 класс.**

**Тема: «Пропорция».**

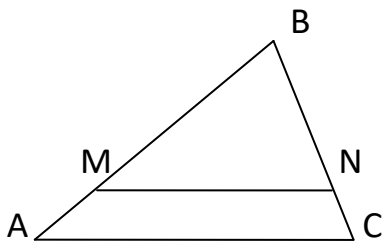
№1. Стороны угла А пересечены параллельными прямыми  $B_1C_1$ ,  $B_2C_2$  и  $B_3C_3$ .



Проведите аналогичное построение в программе GeoGebra. С помощью функции программы «измерение», измерьте длины отрезков, образовавшихся на сторонах угла А, и сравните отношения  $\frac{B_1B_2}{C_1C_2}$  и  $\frac{B_2B_3}{C_2C_3}$ .

Повторите исследование ещё 2 раза, изменяя величину угла А, положение параллельных прямых. Сформулируйте гипотезу. Можно ли считать её доказанной посредством проведённых измерений и вычислений?

№2. В треугольнике ABC проведён отрезок MN, параллельный стороне AC.



Проведите аналогичное построение в программе GeoGebra. С помощью функции программы «измерение», измерьте длины отрезков AM, MB, BN, NC и составьте пропорцию из полученных чисел.

Повторите эксперимент для произвольного треугольника ABC и отрезка MN, параллельного его стороне AC. Сформулируйте гипотезу. Используйте преобразования пропорций, чтобы получить новые свойства данной фигуры. Можно ли на основании проведённых построений и исследований сделать общий вывод?

**Тема: «Длина окружности».**

№3. С помощью программы GeoGebra постройте окружность, измерьте её длину и диаметр, найдите их отношение.

Проведите не менее 5-ти экспериментов. Сформулируйте гипотезу, сделайте выводы.

### **6-8 класс.**

#### **Тема: «Окружность».**

№4. В программе GeoGebra постройте окружность произвольного радиуса и две хорды АВ и CD этой окружности, пересекающихся в точке О. Используя функцию программы «измерение», измерьте длины отрезков хорд, на которые они разбиваются точкой О. Сравните произведения  $AO \cdot OB$  и  $CO \cdot OD$ .

Повторите эксперимент ещё 2 раза. Что можно заметить? Сформулируйте гипотезу. Можно ли на основании проведенного исследования считать гипотезу доказанной? (Для 8 класса: сформулируйте гипотезу, проведите доказательство, сделайте выводы).

№5. В программе GeoGebra начертите окружность произвольного радиуса и постройте её диаметр. Соедините концы диаметра с произвольной точкой окружности и измерьте угол, образованный хордами.

Повторите эксперимент ещё 2 раза. Что можно заметить? Сформулируйте гипотезу. Можно ли считать её доказанной с помощью проведенных построений и измерений? (Для 8 класса: сформулируйте гипотезу, проведите доказательство, сделайте выводы).

#### **Тема: «Взаимное расположение окружностей».**

№6. Сколько случаев взаимного расположения окружностей можно выделить? Для каждого случая найдите взаимосвязь величин  $R_1, R_2, O_1O_2$  (длины радиусов и расстояние между центрами окружностей), проведя несколько экспериментов с построениями.

Сформулируйте выводы.

### **7 класс.**

#### **Тема: «Соотношения между элементами треугольника».**



№7. Для произвольного треугольника ABC сравните длину его медианы с полупериметром (построения и измерения проведите в программе GeoGebra). Проведите не менее трёх экспериментов. Сформулируйте гипотезу, проведите доказательство, сделайте вывод.

№8. Для произвольного треугольника ABC и произвольной точки M сравните сумму  $MA+MB+NC$  с:

1) Полупериметром, если M лежит все треугольника ABC.

2) Периметром, если M лежит внутри или на границе треугольника ABC.

Для каждого случая проведите не менее трех экспериментов, сформулируйте гипотезу, проведите доказательство, сделайте выводы.

№9. Для разных видов треугольников постройте медиану, биссектрису, высоту, проведенные из одной вершины. Каков порядок их расположения?

Докажите утверждения.

№10. Даны прямая C и две точки A и B, лежащие по одну сторону от неё. Найдите такую точку C на прямой, чтобы сумма  $AB+CB$  была наименьшей. (Для поиска нужной точки используйте функции «ползунок» и «измерение» в программе GeoGebra).

Как построить искомую точку?

**8 класс.**

**Тема: «Дробно-линейная функция».**

№11. Исследуйте график - дробно линейной функции  $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ .

В программе Graff Plotter проведите не менее 3-х экспериментов, давая различные значения параметров a,b,c,d.

Сформулируйте гипотезу, проведите доказательство, сделайте выводы.

**Тема: «Четырехугольники».**

№12. Постройте медиану прямоугольного треугольника, проведённую из вершины прямого угла. Сравните длину медианы и гипотенузы. (Построения и измерения используйте в программе GeoGebra).

Проведите не менее трех экспериментов. Сформулируйте гипотезу, проведите доказательство, сделайте выводы.

№13. На сторонах параллелограмма вне его постройте квадраты. Эксперименты проводите в программе GeoGebra.

Какой четырехугольник образуют центры этих квадратов? Проведите доказательство.

№14. Проведя несколько экспериментов с моделированием в программе GeoGebra, выясните, может ли средняя линия трапеции проходить через точку пересечения её диагоналей? Проведите доказательство.

**Тема: «Замечательные точки треугольника».**

№15. Для различных треугольников (прямоугольного, остроугольного, тупоугольного) проведите в программе GeoGebra построение точки пересечения:

- а) серединных перпендикуляров;
- б) высот.

Проведя несколько экспериментов, ответьте на вопросы:

- а) Где находится точка пересечения серединных перпендикуляров в прямоугольном треугольнике? В остроугольном? В тупоугольном?
- б) К какой из вершин треугольника ближе расположена точка пересечения высот?
- в) К какой из сторон треугольника ближе расположена точка пересечения высот?

Сформулируйте гипотезы, проведите доказательства, сделайте выводы.

№16. Постройте окружность впишите в неё треугольник. Из произвольной точки окружности опустите перпендикуляры на стороны треугольника.

Каким свойством обладают основания перпендикуляров?

Проведите ещё несколько экспериментов, изменяя размеры треугольника.

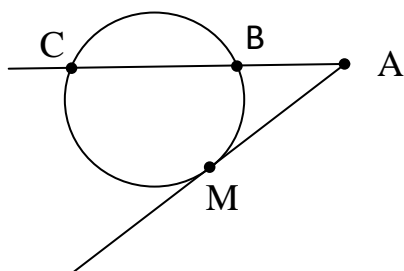
Сформулируйте гипотезу, проведите доказательство, сделайте выводы.

№17. Даны две фиксированные точки окружности А и В и «переменная» точка окружности С. По какой траектории движутся точки пересечения

медиан, биссектрис, высот треугольника ABC, когда точка C «пробегает» окружность? (Используйте функции программы GeoGebra).

**Тема: «Касательная к окружности».**

№18. Из точки, не принадлежащей окружности, постройте касательную к окружности и секущую (построения и измерения проведите в программе GeoGebra).



Сравните  $AM^2$  и  $AB \cdot AC$ .

Проведите не менее трех экспериментов. Сформулируйте гипотезу, проведите доказательство, сделайте выводы.

**Тема: «Описанная окружность».**

№19. В программе GeoGebra постройте треугольник ABC и точку пересечения его высот H. Постройте окружности, описанные около треугольников ABC, ANB, BNC, CHA. Сравните их радиусы.

Проведите не менее трех экспериментов. Сформулируйте гипотезу, проведите доказательство, сделайте выводы.

**Тема: «Вписанный четырехугольник».**

№20. Для произвольного треугольника ABC определите с помощью измерений в программе GeoGebra наименьшую его высоту.

Проведите не менее трёх экспериментов. Сформулируйте гипотезу, проведите доказательство, сделайте выводы.

**Тема: «Описанный четырёхугольник».**

№21. Опишите около окружности четырёхугольник. Измерьте его стороны (построения и измерения проведите в программе GeoGebra).

Проведите те не менее 5- экспериментов.

Занесите данные в таблицу.

	a	b	c	d
1				
2				
3				
4				
5				

Какую закономерность можно заметить? Сформулируйте гипотезу, проведите доказательство, сделайте вывод.

№22. В квадрат вписана окружность. С помощью программы GeoGebra для произвольной точки окружности найдите сумму квадратов расстояний до вершин квадрата.

Повторите вычисления для других точек окружности.

Проведите не менее трёх экспериментов, данные заносите в таблицу.

	Сумма квадратов расстояний от точки до вершин квадрата
1) $Q_1$	
2) $Q_2$	
3) $Q_3$	

Сформулируйте гипотезу, проведите доказательство, сделайте вывод.

№23. Проведя несколько экспериментов с моделированием, выясните, существуют ли такие трапеции, в которые можно как вписать, так и описать около них окружность? Сформулируйте и докажите утверждения.

### **8-9 класс.**

**Тема: «Вписанные и описанные многоугольники».**

№24. Экспериментальным путём с помощью программы GeoGebra установите, можно ли описать окружность около:

а) параллелограмма

б) прямоугольника

в) ромба?

Приведите примеры четырехугольников, около которых нельзя описать окружность.

№25. Экспериментальным путём с помощью программы GeoGebra установите, можно ли вписать окружность в:

а) параллелограмм

б) прямоугольник

в) ромб?

№26. Постройте многоугольник вписанный в окружность.

Проводя эксперименты с изменением положения вершин в программе GeoGebra, выясните:

а) может ли вписанный в окружность многоугольник иметь равные стороны, но неравные углы?

б) равные углы, но не равные стороны?

№27. Постройте произвольный четырехугольник, проведите биссектрисы его углов. Выпишите величины углов четырехугольника, образованного при пересечении биссектрис (построения и измерения проведите в программе GeoGebra).

Проведите ещё эксперименты для разных видов четырехугольников, каждый раз выписывая величины указанных углов. Что можно заметить? Каким свойство обладает четырехугольник, образованный при пересечении биссектрис? Сформулируйте гипотезу, проведите доказательство, сделайте выводы.

**Тема: «Подобие».**

№28. В программе GeoGebra постройте треугольник ABC, проведите биссектрису AD. Сравните отношения  $\frac{AB}{AC}$  и  $\frac{BD}{CD}$ , используя функции программы.

Проведите эксперименты ещё 2 раза. Сформулируйте гипотезу, проведите доказательство, сделайте выводы.

**Тема: «Площадь треугольника».**

№29. Проведите несколько экспериментов, вписывая прямоугольник в окружность и измеряя его площадь (с помощью программы GeoGebra). В каком случае площадь прямоугольника наибольшая?

Сформулируйте гипотезу, проведите доказательство, сделайте вывод.

№30. Постройте ромб, отметьте произвольно внутри него точку. С помощью программы GeoGebra найдите сумму расстояний от этой точки до стороны ромба.

Проведите несколько экспериментов, меняя положение точки. Сформулируйте гипотезу, проведите доказательство, сделайте выводы. На какие фигуры распространяется доказанное свойство?

**9-11 класс.**

**Тема: «Свойство функции».**

№31. Пусть  $f$ -возрастающая и положительная на всей числовой прямой функция.

Выясните экспериментальным путем в программе Graff Plotter, каков характер монотонности функции:

а)  $y = f^2(x)$

б)  $y = \frac{1}{f(x)}$

в)  $y = \sqrt{f(x)}$

г)  $y = \lg(f(x))$

Сформулируйте гипотезы, проведите доказательство, сделайте выводы.

**10 класс.**

**Тема: «Применение производной к исследованию функций».**

№32. Может ли кубическое уравнение  $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$  не иметь корней? Если да, то при каких условиях?

С помощью программы Graff Plotter постройте график многочлена  $y = x^3 + ax^2 + bx + c$ .

Проведите не менее 5-ти экспериментов. Сформулируйте гипотезу, проведите доказательство, сделайте выводы.

№33. Пусть  $R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$  - дробно-рациональная функция (n-степень P(x), m-степень Q(x)).

Изменяя значения m и n, определите экспериментальным путём с помощью программы Graff Plotter:

а) максимальное количество точек, в которых R(x) принимает каждое своё значение.

б) максимальное количество точек экстремума (для случаев, когда  $m \neq n, m = n$ ).

Сформулируйте гипотезу, проведите доказательство, сделайте выводы.

**Тема: «Геометрический смысл производной»**

№34. Является ли условие  $f'(x_0) = k$  достаточным для того чтобы прямая  $y = kx + b$  являлась касательной к графику функций  $y = f(x)$  ?

Проведите несколько экспериментов в программе Graff Plotter. Сделайте вывод. Сформулируйте необходимые и достаточные условия того, чтобы прямая  $y = kx + b$  являлась касательной к графику функции  $y = f(x)$ .

№35. Постройте график функции  $y = x^2$  (любой квадратичной функции).

Выбирая произвольным образом точки плоскости, выясните из каких из них можно провести 0, 1, 2, 3... касательных к параболы. Проведите классификацию возможностей. Задайте каждое множество точек аналитически.

**Тема: «Применение «производной в геометрии».**

№36. Найдите взаимосвязь между длиной отрезка касательной к гиперболе  $y = \frac{a}{x}$ , заключенного между осями координат и точкой касания.

Проведите экспериментальные построения в программе Graff Plotter (не менее 5-ти экспериментов). Сформулируйте гипотезу, проведите доказательство, сделайте вывод.

№37. Для гиперболы  $y = \frac{6}{x}$  выясните, чему равно площадь треугольника, образованного касательной к ней и осями координат.

В программе Graff Plotter проведите не менее 5-ти экспериментов, перебирая различные значения  $x_0$  (абсциссы точки касания). Сформулируйте гипотезу.

Обобщите для случая  $y = \frac{a}{x}$ , проведите доказательство. Какие дополнительные факты удалось установить в процессе доказательства?

Как найти практическое применение полученным фактам?

Примечание для учителя.

Программа Graff Plotter имеет функцию построения касательной к кривой по заданной точке касания, выводит на экран уравнение этой прямой. Площадь треугольника можно определить с помощью данной программы (функция «определенный интеграл» - для 11 класса) или посчитать аналитически.

В процессе доказательства выясняется что  $x_0$  – середина отрезка касательной, заключенного между осями координат (середина гипотенузы отсекаемого треугольника, т.е. центр описанной около него окружности). Эти факты дают способы построения касательной к гиперболе в заданной точке, ей принадлежащей.

**11 класс.**

**Тема: «Интеграл».**

№38. Сравните значения площади параболического сегмента заключенного между параболой  $y = x^2$  и произвольной прямой, параллельной оси абсцисс со значением площади прямоугольника с вершинами в точках пересечения прямой с параболой и основаниями перпендикуляров к оси абсцисс, опущенных из точек пересечения. Проведите несколько экспериментов, используя функции программы Graff Plotter. Сформулируйте гипотезу, проведите доказательство, сделайте выводы.



## Литература

1. Арцев М. Н. Учебно-исследовательская работа учащихся (методические рекомендации для учащихся и педагогов) //Завуч, 2005.- № 6.- с. 4-29.
2. Бобровская М.В., Кузнецова О.Е., Трухина И.В., Улыбышева С.А., ценко В.Н. Математика: учеб. Пособие для 6 кл. общеобразоват. Учреждений, лицеев – Мичуринск: МГПИ, 2004.- 342 с.
3. Ивлев Б. М., Абрамов А. М.и др. Задачи повышенной трудности по алгебре и началам анализа: Учеб. пособие для 10-11 кл. ср. шк.- М.: Просвещение, 1990-48с.
4. Пойа Д. Математическое открытие. Решение задач: основные понятия, изучение и преподавание. М., Наука, 1976. УРСС, 2009.
5. Сгибнев А.И. Исследуем на уроке и на проекте. / В сборнике «Учим математике» (материалы открытой школы-семинара учителей математики). Под ред. А.Д. Блинкова, И.Б. Писаренко, И.В. Ященко. – М.: МЦНМО, 2006.С. 59-71.
6. Смирнова И. М., Смирнов В. А. Геометрия. Нестандартные и исследовательские задачи: Учеб. пособие для 7-11кл. общеобразоват. учреждений. - М.: Мнемозина, 2004. – 148 с.

### Интернет-ресурсы:

<http://www.shkola-2020.ru/nir/uir/>

<http://int-sch.ru/docs/articles/sgibnev/euler3.pdf>